

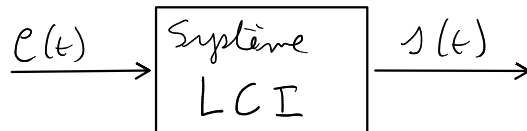
Systemes lineaires et stabilite

Chapitre de révision (sauf stabilite)

I) le systeme lineaire continu invariant (LCI)

1) Definitions

Soit un systeme (electrique, mecanique, ...) qui donne une sortie $s(t)$ à une entree $e(t)$



L - Lineaire : si $\begin{cases} e_1(t) \xrightarrow{\text{donne}} s_1(t) \\ e_2(t) \longrightarrow s_2(t) \end{cases}$

alors $\alpha e_1(t) + \mu e_2(t) \longrightarrow \alpha s_1(t) + \mu s_2(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$)

C - Continu : Un systeme est dit continu si les variations des grandeurs le caracterisant sont des fonctions de type $f(t)$ avec t une variable continue.

On l'oppose generalement aux systemes discrets, en particulier dans le domaine numerique

I - Invariant : ses caracteristiques ne se modifient pas dans le temps.

si $e(t) \xrightarrow{\text{donne}} s(t)$
alors $e(t-\tau) \longrightarrow s(t-\tau)$ avec τ un temps

2) Propriétés

Soit un système sinusoidal permanent:

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

amplitude pulsation Phase

Une propriété remarquable des systèmes LCI est de donner en sortie un signal également sinusoidal et de même pulsation ω

On dit que les signaux sinusoidaux sont des fonctions isomorphes des systèmes LCI

Isomorphe = le signal a la même forme en entrée et en sortie.

→ Donc la sortie s'écrit sous la forme:

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$$

? idem $e(t)$! ?

⇒ Pour un signal sinusoidal permanent en entrée, la recherche de la réponse se résume à :

→ Rechercher S_0 amplitude

→ Rechercher $(\varphi' - \varphi)$ déphasage (ou φ')

Remarque = si on excite un système avec un signal sinusoidal de pulsation ω en entrée, et que la réponse est non sinusoidal en sortie, ou sinusoidal de pulsation ω' différente en sortie → alors le système est non linéaire

II) La fonction de transfert

1) La fonction de transfert (ou transmittance)

On se place ici en régime sinusoïdal permanent

Rappel des notations complexes:

$$\begin{array}{l} \text{Dans } \mathbb{R} \\ e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Dans } \mathbb{C} \\ \underline{e} = E_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\ = \underline{E} e^{i\omega t} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi') \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{s} = S_0 e^{i\varphi'} e^{i\omega t} \\ = \underline{S} e^{i\omega t} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{On a } e(t) = \operatorname{Re}(\underline{e}) \\ s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{E} = E_0 e^{i\varphi} \\ \underline{S} = S_0 e^{i\varphi'} \end{array}$$

Définition de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0 e^{i\varphi'} e^{i\omega t}}{E_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}$$

Pour obtenir le signal de sortie réponse de $e(t)$ sinusoïdal permanent, il suffit de connaître $\underline{H}(j\omega) =$

$$\begin{cases} \rightarrow |\underline{H}| = \frac{S_0}{E_0} & \text{rapport des amplitudes appelé gain } G \\ \rightarrow \operatorname{Arg}(\underline{H}) = \varphi' - \varphi & \text{avance de phase du signal de sortie} \\ & \text{sur le signal d'entrée appelé déphasage} \end{cases}$$

Le signal de sortie est alors = (dans \mathbb{R})

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 \cos(\omega t + \varphi') \\ &= E_0 |\underline{H}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \operatorname{arg}(\underline{H}(j\omega))) \end{aligned}$$

2) Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

En élec, on peut associer des résistances R , bobines L , condensateurs C . Les courants i et tensions u sont alors reliées entre elles par des relations différentielles linéaires:

$$u = R i \quad ; \quad u = L \frac{di}{dt} \quad ; \quad i = C \frac{du}{dt} \quad , \dots$$

En les associant, on peut trouver une équation différentielle reliant $e(t)$ et $s(t)$ à l'aide de la loi des nœuds et la loi des mailles:

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m} = a_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (1)$$

L'ordre du filtre est n ($n \geq m$ admis)

Remarque: [Un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est LCI.]

⊗ Pour un système sinusoïdal permanent:

Plaçons-nous dans \mathbb{C} : $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t} \quad \frac{de}{dt} = j\omega \times \underline{e}$

dans $\boxed{\frac{d}{dt} \rightarrow \times j\omega}$ dans \mathbb{C}

D'où: • Pour une bobine: $\underline{u} = L \frac{di}{dt} \rightarrow \underline{u} = L j\omega \underline{i}$
 $\underline{u} = \underline{z} \underline{i}$ avec $\underline{z} = jL\omega$

• Pour un condensateur: $\underline{i} = C \frac{du}{dt} \rightarrow \underline{i} = C j\omega \underline{u}$
 $\underline{u} = \underline{z} \underline{i}$ avec $\underline{z} = \frac{1}{jC\omega}$

L'eq (1) peut donc s'écrire dans \mathbb{C}

$$b_0 \underline{s}(t) + b_1 \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m \underline{s}(t)}{dt^m} = a_0 \underline{e}(t) + b_1 \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m \underline{e}(t)}{dt^m} \quad (2)$$

avec les b_i et les a_i réels (car $\text{Re}(1) = 1$)

soit $b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 (j\omega)^2 \underline{s} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{e}$

soit, en factorisant par \underline{s} , et par \underline{e} :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}$$

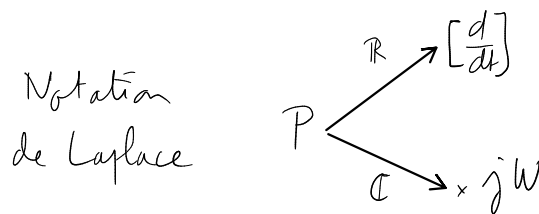
soit $\underline{H} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i}$

A l'ordre 2 (au programme) :

$$\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}$$

$\left. \begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix} \right\}$ sont réels

3) Notation de Laplace et transposition entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel



$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \quad (a_i \text{ et } b_i \text{ réels})$$

soit $[b_0 + b_1 p + b_2 p^2] s = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2] e$

et donc $b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$

III) Stabilité d'un système d'ode 1 ou 2

1) A partir de l'équation différentielle

(partie rédigée en classe)